NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

Bài 1. NGUYÊN HÀM

I. Lý thuyết

1. Nguyên hàm $\int f(x)dx = F(x) + C$
2. Tính chất

- $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ và $\int f(x)dx = f(x) + C$
- $\int k.f(x)dx = k\int f(x)dx \quad (k \neq 0)$
- $\int \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

3. Bảng nguyên hàm

$\int kdx = kx + C \quad (k = const)$	
$\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	$\int u^{\alpha}dx = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\int \dfrac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \dfrac{1}{u}dx = \ln\lvert u\rvert + C$
$\int e^{x}dx = e^{x} + C$	$\int e^{u}dx = e^{u} + C$
$\int a^{x}dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$	$\int a^{u}dx = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C$
$\int \cos xdx = \sin x + C$	$\int \cos udx = \sin u + C$
$\int \sin xdx = -\cos x + C$	$\int \sin udx = -\cos u + C$
$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$	$\int \dfrac{1}{\cos^2 u}dx = \tan u + C$
$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$	$\int \dfrac{1}{\sin^2 u}dx = -\cot u + C$
$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a} + \dfrac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + C$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$
$\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{a + x}{a - x}\right\rvert + C$	$\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C$
$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} + \dfrac{a}{2}\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + k}\right\rvert + C$

4. Các phương pháp tìm nguyên hàm

a. Phương pháp đổi biến số

Nếu $\int f(x)dx = F(x)+C$ thì $\int f\left[u(x).u'(x)\right]dx = F\left(u(x)\right)+C$

Đặt $t=u(x)\Rightarrow dt=u'(x)dx$. Khi đó $\int f(t)dt = F(t)+C = F\left[u(x)\right]+C$

Cách đặt biến:

Dạng 1: Đặt biến thường

+ $\int f(ax+b)dx$ đặt $t=ax+b$

+ $\int \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$ đặt $t=\sqrt{x}$

+ $\int f\left(x^{n+1}\right).xdx$ đặt $t=x^{n+1}$

+ $\int f(\sin x)\cos xdx$ đặt $t=\sin x$

+ $\int f(\cos x)\sin xdx$ đặt $t=\cos x$

+ $\int f(\tan x)dx$ đặt $t=\tan x$

+ $\int f(\cot x)dx$ đặt $t=\cot x$

+ $\int \frac{f(\ln x)}{x}dx$ đặt $t=\ln x$

+ $\int f\left(e^x\right)e^x dx$ đặt $t=e^x$

Dạng 2: Đặt lượng giác:

+ $\begin{cases}\sqrt{a^2+x^2}\\ \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\\ \frac{1}{a^2+x^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=a\tan t\\ x=a\cot t\end{cases}$

+ $\begin{cases}\sqrt{a^2-x^2}\\ \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=a\sin t\\ x=a\cos t\end{cases}$

+ $\begin{cases}\sqrt{x^2-a^2}\\ \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{a}{\sin t}\\ x=\frac{a}{\cos t}\end{cases}$

Sau khi tìm được nguyên hàm theo t thì ta thay ngược lại vào $f(x)$.

b. Phương pháp nguyên hàm từng phần

Cho hai hàm số $u=u(x)$ và $v=v(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[a;b]$ thì khi đó ta có $\int udv = uv - \int vdu$

Cách làm: đặt theo quy tắc: "nhất loga – nhì đa – thức tam – lượng tứ mũ"

c. Dạng nguyên hàm hữu tỉ

- Nguyên hàm dạng: $\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

- Nguyên hàm dạng: $\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x_1-x_2)}\ln\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right| + C$ với $\Delta > 0$

- Nguyên hàm dạng: $\int \frac{P(x)}{G(x)}\mathrm{d}x$

- Nếu $Q(x)$ là tích các nghiệm đơn $Q(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$ thì ta tách

$$\int \frac{P(x)}{G(x)}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+...+\frac{A_n}{x-x_n}\right)\mathrm{d}x$$

- Nếu $Q(x)$ là tích các nghiệm đơn và nghiệm bội giả sử như $Q(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)^n$ thì ta tách

$$\int \frac{P(x)}{G(x)}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\frac{B_1}{x-x_3}+\frac{B_2}{(x-x_3)^2}+...+\frac{B_{n-1}}{(x-x_3)^{n-1}}+\frac{B_n}{(x-x_3)^n}\right)\mathrm{d}x$$

- Nếu $Q(x)$ là tích các nghiệm đơn và một tam thức bậc hai vô nghiệm giả sử

$(x-x_1)(x-x_2)(x^2+px+q), \Delta = p^2-4q<0$ thì ta tách $\int \frac{P(x)}{G(x)}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\frac{Bx+C}{x^2+px+q}\right)\mathrm{d}x$

d. Dạng nguyên hàm vô tỉ

- Nguyên hàm dạng $R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)$ đặt $\begin{cases} x=a\sin t \\ x=a\cos t \end{cases}$

- Nguyên hàm dạng $R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)$ đặt $x=a\,\mathrm{tant}$

- Nguyên hàm dạng $R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)$ đặt $x=\frac{a}{\cos t}$

- Nguyên hàm dạng $R\left(x,\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)$ đặt $x=a\cos 2t$

- Nguyên hàm dạng $R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ đặt $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

- Nguyên hàm dạng $R=\dfrac{1}{\left(ax+b\right)^n\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$ đặt $t=\dfrac{1}{ax+b}$

e. Dạng nguyên hàm lượng giác

- Nguyên hàm dạng $\int \sin^n x.\cos x^m dx \quad \left(m,n\in\mathbb{N}\right)$

- m,n chẵn thì dùng công thức hạ bậc
- m lẻ thì đặt $u=\sin x$, n lẻ thì đặt $u=\cos x$

f. Một số dạng tích phân đặc biệt

- Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục là hàm chẵn trên $\left[-a;a\right]$ thì ta có $\int\limits_{-a}^{a} f\left(x\right)dx=2\int\limits_{0}^{a} f\left(x\right)dx$.

- Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục là hàm lẻ trên $\left[-a;a\right]$ thì ta có $\int\limits_{-a}^{a} f\left(x\right)dx=0$.

- Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục là hàm chẵn trên $\left[-\alpha;\alpha\right]$ thì ta có $\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \dfrac{f\left(x\right)}{a^x+1}dx=\int\limits_{0}^{a} f\left(x\right)dx$.

- Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ thì ta có $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin x\right)dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos x\right)dx$.

II. Sử dụng máy tính cầm tay

Bấm máy tính như sau: $\dfrac{d}{dx}\left(DA\right)\Big|_{x=X}-DB$

1. Tích phân hữu tỉ

⊕ Dạng $\int \dfrac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}$ trong đó bậc của $P\left(x\right)\ge Q\left(x\right)$. Ta thực hiện phép chia đa thức. Áp dụng phương pháp CALC 100

Ta giả sử $Q\left(x\right)=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)$ (nhiều hay ít hơn cũng làm tương tự):

$\dfrac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}=\dfrac{A}{x-x_1}+\dfrac{B}{x-x_2}+\dfrac{C}{x-x_3}+R\left(x\right)$ trong đó $R\left(x\right)$ là biểu thức dư của phép chia.

Tìm $\begin{cases} A=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{P\left(x\right)}{\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)}\right)\Bigg|_{x=x_1} \\ B=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{P\left(x\right)}{\left(x-x_1\right)\left(x-x_3\right)}\right)\Bigg|_{x=x_2} \\ C=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{P\left(x\right)}{\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}\right)\Bigg|_{x=x_3} \end{cases}$.

Tìm $R(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}-\frac{A}{x-x_1}-\frac{B}{x-x_2}-\frac{C}{x-x_3}\right)\Bigg|_{x=100}$ sử dụng cách tách 100

⊕ Dạng $f(x)=\frac{ax+b}{(x-x_1)(x-x_2)}$ cần tách đưa về dạng $\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$

Cách 1. Bấm: $\frac{aX+b}{\frac{d}{dx}\left[(X-x_1)(X-x_2)\right]\Big|_{x=X}}$

CALC $X=x_1\to A$

CALC $X=x_2\to B$

Cách 2. Bấm: $\frac{aX+b}{(X-x_1)(X-x_2)}.(X-x_1)$

CALC $X=x_1+0,0000001\to A$

CALC $X=x_2+0,0000001\to B$

Cách 3: Bấm $\begin{cases} A=\frac{d}{dx}\left(\frac{ax+b}{x-x_2}\right)\Bigg|_{x=x_1} \\ B=\frac{d}{dx}\left(\frac{ax+b}{x-x_1}\right)\Bigg|_{x=x_2} \end{cases}$

Cả ba cách trên nếu tìm nguyên hàm đều cho dạng: $A\ln|x-x_1|+B\ln|x-x_2|+C$.

VD. Tách $F(x)=\frac{x^2+2x+6}{x^3-7x^2+14x-8}$ thành các phân thức tối giản

$$F(x)=\frac{x^2+2x+6}{x^3-7x^2+14x-8}=\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$$

Bấm: $\frac{X^2+2X+6}{\frac{d}{dx}\left[(X-1)(X-2)(X-4)\right]\Big|_{x=X}}$

CALC $X=1$ hệ số $A=3$

d/dx((X−1)(X−2)(X
3

CALC $X=2$ hệ số $B=-7$

$\frac{d}{dx}((X-1)(X-2)(X$

-7

CALC $X=4$ hệ số $C=5$

$\frac{d}{dx}((X-1)(X-2)(X$

5

Vậy $F(x)=\dfrac{x^2+2x+6}{x^3-7x^2+14x-8}=\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{7}{x-2}+\dfrac{5}{x-3}$

VD. Tính $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

Đặt $t=\sqrt[3]{x+1}\Rightarrow 3t^2\mathrm{d}t=\mathrm{d}x\Rightarrow\displaystyle\int\frac{3t^2}{1+t}\mathrm{d}t$

Thực hiện phép chia bằng máy tính: $\dfrac{3t^2}{t+1}$

Ta nhẩm lấy hệ số cao nhất của tử chia cho mẫu ta được $\dfrac{3t^2}{t}=3t$

Nhập màn hình: CALC $X=100$ ta được

$\frac{3X^2}{1+X}-3X$

$-\frac{300}{101}$

Ta để ý vì bậc tử chia bậc mẫu ra bậc nhất nên ta tách $\dfrac{-300}{101}$ được hệ số tự do là -3.

Sửa màn hình:

$\frac{3X^2}{1+X}-3X+3$

$\frac{3}{101}$

Ta được $\dfrac{3}{101}=\dfrac{3}{t+1}$

Vậy $\dfrac{3t^2}{t+1}=3t-3+\dfrac{3}{1+t}\Rightarrow\displaystyle\int\frac{3t^2}{t+1}=\frac{3t^2}{2}-3t+3\ln|1+t|+C$

$\Rightarrow \dfrac{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}{2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right| + C$

VD. Tính nguyên hàm $\displaystyle\int \frac{1+2\sin x}{2\sin x.\cos^3 x + \cos^4 x}\mathrm{d}x$

Ta biến đổi: $\displaystyle\int \frac{1+2\sin x}{2\sin x.\cos^3 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x = \int \frac{1+2\sin x\cos x}{2\sin x\cos^3 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x = \int \frac{1+2\sin x\cos x}{2\tan x+1}.\frac{1}{\cos^4 x}\mathrm{d}x$

$\displaystyle = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}+2\tan x}{2\tan x+1}.\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\tan^2 x+1+2\tan x}{2\tan x+1}\mathrm{d}(\tan x)$

Ta thực hiện phép chia đa thức tử chia cho mẫu:

Đặt $X = \tan x \Rightarrow \dfrac{X^2+2X+1}{2X+1}$

Ta chia bậc cao nhất của tử cho mẫu ta được $\dfrac{X^2}{2X} = \dfrac{1}{2}X$

Nhập màn hình: CALC $X = 100$

$\dfrac{X^2+2X+1}{2X+1} - \dfrac{1}{2}X$ Math ▲ $\dfrac{151}{201}$

Vì thương của phép chia là bậc 1, mà hạng tử chứa bậc 1 đã là $\dfrac{1}{2}X$ nên tiếp theo ta sẽ được $\dfrac{150}{201} \approx \dfrac{3}{4}$

Sửa màn hình: CALC $X = 100$

$\dfrac{X^2+2X+1}{2X+1} - \dfrac{1}{2}X - \dfrac{3}{4}$ Math ▲

$\dfrac{X^2+2X+1}{2X+1} - \dfrac{1}{2}X - \dfrac{3}{4}$ Math ▲ $\dfrac{1}{804}$

Tách $\dfrac{1}{804} = \dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{2X+1}$

Vậy ta được thương là $\dfrac{1}{2}X + \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{2X+1} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\tan x + \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{2\tan x+1}$

Suy ra $\displaystyle\int\left(\frac{1}{2}\tan x+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}.\frac{1}{2\tan x+1}\right)\mathrm{d}(\tan x) = \frac{1}{4}\tan^2 x + \frac{3}{4}\tan x + \frac{1}{8}\ln\left|2\tan x+1\right| + C$

Ta thực hiện

⊕ Tách phân thức $\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{K}{cx+d}$

Nhập máy tính: $\left(\frac{aX+b}{cX+d}-\frac{a}{c}\right)(cX+d)$ $\underrightarrow{CALC\ \ X=10}$ K

Khi đó: $\int\frac{ax+b}{cx+d}dx=\int\left(\frac{a}{c}+\frac{K}{cx+d}\right)dx=\frac{ax}{c}+Kc\ln|cx+d|$

VD. Tách $F(x)=\frac{2x+1}{2x-1}$

$\frac{2x+1}{2x-1}=1+\frac{K}{2x-1}$

Bấm $\left(\frac{2x+1}{2x-1}-1\right)(2x-1)$ CALC $x=10$ $\Rightarrow K=2$

Vậy $F(x)=\frac{2x+1}{2x-1}=1+\frac{2}{2x-1}$

⊕ Tách phân thức dạng:

$$\int\frac{P(x)}{G(x)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\frac{B_1}{x-x_3}+\frac{B_2}{(x-x_3)^2}+...+\frac{B_{n-1}}{(x-x_3)^{n-1}}+\frac{B_n}{(x-x_3)^n}\right)\mathrm{d}x$$

VD. Phân tích hàm số $F(x)=\frac{x}{(x-1)(x+1)^2}$ thành các phân thức tối giản

Ta có $\frac{x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$

Ta sẽ tìm được A,C dễ hơn tìm B

Bấm: $\frac{x}{\frac{d}{dx}\left[(x+1)^2(x-1)\right]\Big|_{x=X}}$

Tìm A CALC $X=1$ ta được $A=\frac{1}{4}$

Để tìm C ta bấm $\frac{x}{(x+1)^2(x-1)}(x+1)^2$

CALC $X=-1,00001$ ta được $C=\frac{1}{2}$

Để tìm B ta bấm: $\frac{x}{(x+1)^2(x-1)}(x+1)^2$

CALC $X=-1,00001$ ta được sau đó trừ đi $\frac{1}{2}$

đem chia cho $x+1$ xấp xỉ $\frac{-1}{4}$ vậy

$B=\frac{-1}{4}$

Vậy $F(x)=\frac{x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}+\frac{1}{2(x+1)^2}$

Bài này khá phức tạp vì tìm B không CALC được như bình thường. Các bạn chú ý theo dõi kỹ chỗ tìm B: khi CALC được kết quả nào thì trừ cho phần nguyên của số đó. Rồi đem chia cho mẫu của phân thức ta cần tìm hệ số.

VD. Tách $F(x)=\frac{1}{x^3-1}$ thành các phân thức tối giản

$F(x)=\frac{1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$

Tìm hệ số A bấm $\frac{1}{\frac{d}{dx}\left[x^3-1\right]\Big|_{x=1}}=\frac{1}{3}$

Tìm $Bx+C$ ta có:

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{3(x-1)}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}=\frac{\frac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)+(Bx+C)(x-1)}{x^3-1}\Rightarrow\frac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)+(Bx+C)(x-1)=1$$

$\Rightarrow Bx+C=\frac{1-\frac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)}{x-1}$. Đến đây để tìm B,C ta vào hệ MODE 2 nhập hàm bên r $x=i$

Vậy $Bx+C=\frac{-1}{3}x-\frac{2}{3}$

Vậy $F(x)=\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{3(x-1)}+\frac{\frac{-1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2+x+1}$

III. Ví dụ

VD. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2-2x+1$

A. $F(x)=\frac{1}{3}x^3-2x+x+C$

B. $F(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+C$

C. $F(x)=2x-2+C$

D. $F(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+x+C$

Ta có: $\int f(x)dx=\int(x^2-2x+1)dx=\int x^2dx+\int -2xdx+\int 1dx=\frac{x^3}{3}-x^2+x+C$. Chọn B.

VD. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$ là

A. $\ln x-\ln x^2+C$

B. $\ln x-\frac{1}{x}+C$

C. $\ln|x|+\frac{1}{x}+C$

D. $\ln|x|-\frac{1}{x}+C$

Ta có: $\int f(x)dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x^2}dx=\ln|x|+\frac{1}{x}+C$

VD. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{5x+1}$ là

A. $\frac{1}{5}\ln|5x+1|+C$

B. $-\ln|5x+1|+C$

C. $\frac{-1}{5}\ln|5x+1|+C$

D. $\ln|5x+1|+C$

Ta có: $\int\frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$

Áp dụng: $\int\frac{1}{5x+1}dx=\frac{1}{5}\ln|5x+1|+C$

VD. Tìm nguyên hàm của $f(x)=(3-x)^4$ là:

A. $\frac{-(3-x)^5}{5}+C$

B. $\frac{(3-x)^5}{5}+C$

C. $4(3-x)^5+C$

D. $-4(3-x)^5+C$

Ta có: $\int u^\alpha dx=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$

Áp dụng: $\int (3-x)^4\, dx = \frac{-(3-x)^5}{5} + C$

VD. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ và thỏa mãn $F\left(\frac{3}{2}\right) = 0.$ Tính $F(3).$

A. $F(3) = \ln 2$ B. $F(3) = 2\ln 2$ C. $F(3) = -2\ln 2$ D. $F(3) = -\ln 2$

Ta có: $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$

Đồng nhất thức ta được $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x - (2A+B)}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$

Ta có $-\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{x-2}dx = -\ln|x-1| + \ln|x-2| + C$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow C = 0$. Vậy $f(3) = -\ln 2$.

Qua ví dụ trên ta lưu ý:

Có thể nhớ nhanh công thức: $\int \frac{1}{(x-a)(x-b)}dx = \frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{x-b}{x-a}\right| + C$ hay tổng quát hơn cho trường hợp $\int \frac{1}{(ax+b)(cx+d)}dx = \frac{1}{ad-bc}\ln\left|\frac{ax+b}{cx+d}\right| + C$

VD. Xét $I = \int x^3(4x^4-3)^5\, dx$. Bằng cách đặt $u = 4x^4 - 3$. Khẳng định nào sau đâu đúng?

A. $I = \frac{1}{4}\int u^5 du$ B. $I = \frac{1}{12}\int u^5 du$ C. $I = \frac{1}{16}\int u^5 du$ D. $I = \int u^5 du$

Đặt $u = 4x^4 - 3 \Rightarrow du = 16x^3dx \Leftrightarrow x^3dx = \frac{du}{16}$ thay vào $I = \int x^3(4x^4-3)^5\, dx$. ta được $\frac{1}{16}\int u^5 du.$

VD. Giả sử $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2e^x$. Tính $S = a+b+c$

A. $S=1$ B. $S=0$ C. $S=5$ D. $S=2$

Ta có $F'(x) = (2ax+b)e^x + e^x(ax^2+bx+c) = e^x\left[ax^2 + (2a+b)x + b + c\right] = e^x x^2$

$\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases}$

Hoặc một cách khác: dựa vào bản chất của nguyên hàm từng phần mà ta có:

Tạm ký hiệu như sau: $u', u'', u''', ...$ là đạo hàm lần 1, 2, 3 …. Của $u(x)$. $v_1, v_2, v_3, ...$ là nguyên hàm lần 1,2,3… của $v(x)$.

Ta có được: $uv_1 - u'v_2 + u''v_3 - ... + ...$

Áp dụng: $u = x^2 \Rightarrow u' = 2x, u'' = 2$; $v = e^x \Rightarrow v_1 = e^x, v_2 = e^x, v_3 = e^x$

$x^2.e^x - 2x.e^x + 2e^x = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right)$ vậy ta cũng đã xác định được a, b, c nhanh chóng.

Vậy $S = a + b + c = 1 + 2 - 2 = 1$

Bấm máy tính như sau:

$\int_1^{100} x^2 e^x dx \div e^{100}$

9802

Tách: $9802 = 10000 - 200 + 2 = x^2 - 2x + 2 = F(x) \rightarrow 1 - 2 + 2 = 1$. Chọn A.

VD. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$

A. $\frac{1}{2}\sin 2x + C$

B. $\frac{-1}{2}\sin 2x + C$

C. $2\sin 2x + C$

D. $-2\sin 2x + C$

Đặt $t = 2x \Leftrightarrow dt = 2dx \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{2}$ thay vào $\int \cos x dx = \int \cos t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\sin t + C$

Thay ngược lại ta được $\frac{1}{2}\sin 2x + C$

Ta có công thức nhanh: $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$; $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$

VD. Cho a, b là hai số thực thỏa mãn $F(x) = (a\cos x + b\sin x)e^x$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \cos x$. Tính $P = a + b$

A. 2

B. 1

C. 4

D. 3

Đây là dạng nguyên hàm lặp lại, vì khi ta nguyên hàm hai lần sẽ quay lại đề bài ban đầu.

Đặt $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = -\sin x, u'' = -\cos x \\ v_1 = e^x dx \end{cases}$ (ở đây có một quy ước nhỏ là v_1, v_2 là nguyên hàm)

Ta có $I=\cos x.e^{x}+\sin x.e^{x}-\int e^{x}\cos xdx \Leftrightarrow 2I=e^{x}\left(\cos x+\sin x\right) \Leftrightarrow I=e^{x}\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)$

Vậy $a=b=\frac{1}{2} \Rightarrow S=a+b=1$

Ta có công thức giải nhanh:

$$\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cos bx+b\sin bx\right)+C$$

$$\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin bx-b\cos bx\right)+C$$

VD. Biết $\int xe^{2x}dx=axe^{2x}+be^{2x}+C \ \left(a,b\in\mathbb{Q}\right)$.Tính ab

A. $ab=\frac{-1}{4}$ B. $ab=\frac{1}{4}$ C. $ab=\frac{-1}{8}$ D. $ab=\frac{1}{8}$

Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=e^{2x}dx\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}du=dx\\ v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{cases}$

Ta có: $\frac{x}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=\frac{x}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C \ \Rightarrow \begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=\frac{-1}{4}\end{cases} \Rightarrow ab=-\frac{1}{8}$

Bấm máy tính như sau:

$\int_0^{100} xe^{2x}dx \div e^{200}$ — 49.75	49.75 — $\frac{199}{4}$

Tách: $\frac{199}{4}=\frac{200-1}{4}=\frac{2x}{4}-\frac{1}{4}=\frac{x}{2}-\frac{1}{4} \Rightarrow a.b=\frac{-1}{8}$

VD. Cho $F\left(x\right)=\frac{-1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f\left(x\right)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'\left(x\right)\ln x$.

A. $\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{5x^2}+C$ B. $\frac{\ln x}{x^3}-\frac{1}{5x^2}+C$

C. $\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{3x^2}+C$ D. $-\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{5x^2}+C$

$F'(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{x^4}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x^3}$

Xét nguyên hàm $\int f'(x)\ln x dx$ đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=f'(x)dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{x}dx \\ v=f(x) \end{cases}$

$\int f'(x)\ln x dx=\ln x.f(x)-\int\frac{f(x)}{x}dx=\frac{\ln}{x^3}+\frac{1}{3x^3}+C$

VD. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x+2x$ thỏa mãn $F(0)=\frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x)=e^x+x^2+\frac{3}{2}$

B. $F(x)=2e^x+x^2-\frac{1}{2}$

C. $F(x)=e^x+x^2+\frac{5}{2}$

D. $F(x)=e^x+x^2+\frac{1}{2}$

Ta có: $\int(e^x+2x)dx=e^x+2x^2+C$

$F(0)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow e^0+0^2+C=\frac{3}{2}\Leftrightarrow C=\frac{1}{2}$. Vậy $F(x)=e^x+x^2+\frac{1}{2}$

VD. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(x+1)e^x$ và $\int f(x)dx=(ax+b)e^x+C$ với $a,b\in\mathbb{R}$.

Tính $a+b$

A. 0

B. 3

C. 2

D. 1

Ta có $F(x)=(ax+b)e^x+C$ là nguyên hàm của $f(x)$ và $f'(x)=(x+1)e^x$

Đặt $\Rightarrow F''(x)=f'(x)$

$\int f'(x)dx=\int(x+1)e^x dx=xe^x+C=f(x)$

$\int f(x)dx=\int xe^x dx=(x-1)e^x+C$

Vậy $a=1,b=-1\Rightarrow a+b=0$

VD. Tìm nguyên hàm của hàm số $\int\frac{2x^3+1}{x(x^3-1)}dx$ bằng

A. $\ln\left|x^2-\frac{1}{x}\right|+C$

B. $\ln\left|x^2+\frac{1}{x}\right|+C$

C. $\ln\left|x-\frac{1}{x^2}\right|+C$

D. $\ln\left|x+\frac{1}{x^2}\right|+C$

Sử dụng phương pháp tách $\frac{2x^3+1}{x\left(x^3-1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx^2}{x^3-1}$

CALC $X=0,000001$ [$\frac{2X^3+1}{X(X^3-1)}X$ → -1] hệ số $A=-1$

CALC $X=1,0000001$ [$\frac{2X^3+1}{X(X^3-1)}(X^3-1)$ → 3.00000003] hệ số $B=3$

Suy ra: $\frac{2x^3+1}{x\left(x^3-1\right)}=\frac{-1}{x}+\frac{3x^2}{x^3-1}$

Khi đó: $\int\frac{2x^3+1}{x\left(x^3-1\right)}dx=\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{3x^2}{x^3-1}\right)dx=-\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{d\left(x^3-1\right)}{x^3-1}$

$=-\ln|x|+\ln\left|x^3-1\right|+C=\ln\left|\frac{x^3-1}{x}\right|+C=\ln\left|x^2-\frac{1}{x}\right|+C$

Bấm máy trực tiếp: SHIFT ∫

[$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\left|X^2-\frac{1}{X}\right|\right)\right)|$ → 1.438×10^{-12}]

VD. Tìm nguyên hàm $f(x)$ của hàm số $f'(x)=\frac{\cos x}{(2+\sin x)^2}$

A. $\frac{\sin x}{(2+\sin x)^2}+C$ B. $\frac{1}{2+\cos x}+C$ C. $\frac{-1}{2+\sin x}+C$ D. $\frac{\sin x}{2+\sin x}+C$

Ta có: $\int\frac{\cos x}{(2+\sin x)^2}dx=\int\frac{d(2+\sin x)}{(2+\sin x)^2}=\frac{1}{2+\sin x}+C$. Chọn C

VD. Giả sử một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}+\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$ có dạng $a\sqrt{1-x^3}+\frac{b}{1+\sqrt{x}}$.

Tính $a+b$

A. -2 B. $\frac{8}{3}$ C. 2 D. $\frac{-8}{3}$

Ta có $\int f(x)dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}dx$

Tính $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}dx$ đặt $t=\sqrt{1-x^3} \Rightarrow 2tdt = -3x^2dx$

$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}dx = -\frac{2}{3}\int dt = -\frac{2}{3}t + C_1 = \frac{-2}{3}\sqrt{1-x^3} \Rightarrow A = \frac{-2}{3}$

Tính $\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}dx = 2\int \frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}d\left(1+\sqrt{x}\right) = \frac{-2}{1+\sqrt{x}} + C_2 \Rightarrow B = -2$

Vậy $a+b=-\frac{8}{3}$

VD. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x$, thỏa mãn $F(0)=\frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T=F(0)+F(1)+F(2)+...+F(2017)$

A. $T=1009.\frac{2^{2017}+1}{\ln 2}$ B. $T=2^{2017.2018}$ C. $T=\frac{2^{2017}-1}{\ln 2}$ D. $T=\frac{2^{2018}-1}{\ln 2}$

Ta có $F(x)=\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}+C$

Mà $F(0)=\frac{1}{\ln 2} \Rightarrow C=0 \Rightarrow F(x)=\frac{2^x}{\ln 2}$

$T=F(0)+F(1)+F(2)+...+F(2017)=\frac{2^0}{\ln 2}+\frac{2}{\ln 2}+\frac{2^1}{\ln 2}+...+\frac{2^{2017}}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}\frac{1-2^{2018}}{-1}=\frac{2^{2018}-1}{\ln 2}$

Bấm máy: ta cũng biến đổi để ra được $F(x)=\frac{2^x}{\ln 2}$

Bấm: SHIFT log□

$\sum_{x=0}^{17}\left(\frac{2^X}{\ln(2)}\right)$ ta được $\sum_{x=0}^{17}\left(\frac{2^X}{\ln(2)}\right)$ 378192.4061 bấm gán vào A, lấy A trừ đi đáp án đã rút gọn

$A-\frac{2^{18}-1}{\ln(2)}$ 0. Chọn D.

Bài 2. TÍCH PHÂN

I. Lý thuyết

1. Tích phân

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

2. Tính chất

Tích phân của tổng thì bằng tổng các tích phân: $\int_a^b \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

Có thể đưa hằng số ra ngoài tích phân: $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

Tích phân tại một điểm bằng 0: $\int_a^a f(x)dx = 0$

Chèn điểm $c \in (a;b)$ vào cận ta có: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Tính bất biến của tích phân: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(y)dy...$

II. Sử dụng máy tính cầm tay

Sử dụng chức năng $\int_{\square}^{\square}\square$ để tính tích phân.

III. Ví dụ

1. Tích phân dạng hàm

VD. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[1;4]$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_1^4 f'(x)dx = 2$. Giá trị $f(4)$ là

A. 2 B. 3 C. 4 D. 1

Ta có: $\int_1^4 f'(x)dx = f(x)\Big|_1^4 = f(4) - f(1) = 2 \Rightarrow f(4) = 3.$

VD. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$, biết $\int_0^9 f(x)dx = 9$ và $F(0) = 3$. Tính $F(9)$

A. -6 B. -12 C. 12 D. 6

Ta có $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ từ đó ta có thể tính được một yếu tố khi biết hai yếu tố còn lại.

$\int_0^9 f(x)\mathrm{d}x = 9 = F(9) - F(0) \Leftrightarrow F(9) = 9 - 3 = 6$. Chọn D.

VD. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;4]$, $f(4) = 2017, \int_{-1}^{4} f'(x)\mathrm{d}x = 2016$. Tính $f(-1)$

A. $f(-1) = 3$ B. $f(-1) = 1$ C. $f(-1) = -1$ D. $f(-1) = 2$

Ta có: $\int_{-1}^{4} f'(x)\mathrm{d}x = f(4) - f(-1) = 2017 - f(-1) = 2016 \Rightarrow f(-1) = 1$. Chọn B.

VD. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;2]$ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$, biết $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 1$ và $F(-1) = -1$. Tính $F(2)$

A. 2 B. 0 C. 3 D. 1

Chọn A.

VD. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_2^5 f(x)dx = 10$. Tính $I = \int_5^2 [2 - 4f(x)]dx$

A. $I = 32$ B. $I = 34$ C. $I = 36$ D. $I = 40$

Từ $I = \int_5^2 [2 - 4f(x)]dx = \int_5^2 2dx - 4\int_5^2 f(x) = 2x\Big|_5^2 + 4\int_2^5 f(x) = -6 + 40 = 34$

Hoặc

Mẹo: $\int_a^b f(x)dx = K \Rightarrow f(x) = \dfrac{K}{b-a}$

Áp dụng: $\int_2^5 f(x)dx = 10 \Rightarrow f(x) = \dfrac{10}{3}$

$I = \int_5^2 [2 - 4f(x)]dx = \int_5^2 \left[2 - 4.\dfrac{10}{3}\right] = 34$

VD. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x)dx = 7$ và $\int_2^6 f(x)dx = 3$. Tính $I = \int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx$

A. $I=10$ B. $I=4$ C. $I=7$ D. $I=-4$

Áp dụng tính chất $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

Ta có:

$$\int_0^{10} f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^6 f(x)dx+\int_6^{10} f(x)dx \Leftrightarrow 7=\int_0^2 f(x)dx+3+\int_6^{10} f(x)dx \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx+\int_6^{10} f(x)dx=4$$

VD. Cho $\int_{-2}^{2} f(x)dx=1$, $\int_2^4 f(t)dt=-4$. Tính $I=\int_{-2}^{4} f(y)dy$.

A. -5 B. -3 C. 3 D. 5

$$\int_{-2}^{4} f(y)dy=\int_2^{-2} f(y)dy+\int_2^4 f(y)dy=-\int_{-2}^{2} f(x)dx+\int_2^4 f(t)dt=-1-4=-5$$

VD. Tính $F'(0)$ của hàm số $F(0)=\int_0^{x^2}\cos\sqrt{t}dt\ \ (x>0)$.

A. 0 B. -2 C. 2 D. $\sqrt{2}$

Đặt $y=\sqrt{t}\Leftrightarrow 2ydy=dt$

Đổi cận tích phân: $\begin{cases}t=0\\t=x^2\end{cases}\to\begin{cases}y=0\\y=x\end{cases}$

Ta được: $F(x)=\int_0^{x^2}\cos\sqrt{t}dt=\int_0^x 2y\cos ydy$

Đặt $\begin{cases}u=2y\\dv=\cos ydy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2dy\\v=\sin y\end{cases}$

Ta có: $2y\sin y\Big|_0^x-2\int_0^x\sin ydy=2y\sin y\Big|_0^x+2\cos y\Big|_0^x=2x\sin x+2\cos x-2=F(x)$

Ta có $f'(x)=2x\cos x\to f(0)=0$

VD. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{-2}^{4} f(x)dx=2$. Khẳng đinh nào sau đây sai?

A. $\int_{-1}^{2} f(2x)dx=1$ B. $\int_{-3}^{3} f(x+1)=2$ C. $\int_{-1}^{2} f(2x)dx=2$ D. $\frac{1}{2}\int_0^6 f(x-2)dx=1$

Ta có: $\int\limits_{-2}^{4} f\left(x\right)dx = 2 \Rightarrow f\left(x\right) = \dfrac{2}{4+2} = \dfrac{1}{3}$

Bấm:

Đáp án A. $\int_{-1}^{2} \frac{1}{3}dx$ Math ▲ 1

Đáp án B $\int_{-3}^{3} \frac{1}{3}dx$ Math ▲ 2

Đáp án D $\frac{1}{2}\int_{0}^{6} \frac{1}{3}dx$ Math ▲ 1

Chọn C vì ở câu A ta đã loại được C.

VD. Cho $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[0;2\right]$ thỏa mãn $f\left(x\right)+2f\left(2-x\right)=2x.$ Tính $\int\limits_{0}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x.$

A. $\dfrac{4}{3}$ B. $\dfrac{2}{3}$ C. $\dfrac{-4}{3}$ D. 2

Cách 1:

Từ $f\left(x\right)+2f\left(2-x\right)=2x \Leftrightarrow \int\limits_{0}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x + 2\int\limits_{0}^{2} f\left(2-x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{2} 2x\mathrm{d}x = 4 \Rightarrow 3\int\limits_{0}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x = 4 \Leftrightarrow \int\limits_{0}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x = \dfrac{4}{3}$

Cách 2:

Chọn $x=1$ thay vào $f\left(x\right)+2f\left(2-x\right)=2x \Rightarrow f\left(1\right)+2f\left(1\right)=2$

$\Leftrightarrow 3f\left(1\right)=2 \Leftrightarrow f\left(1\right)=\dfrac{2}{3} \Rightarrow \int\limits_{0}^{2} f\left(1\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{2}\dfrac{2}{3}\mathrm{d}x = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \int\limits_{0}^{2} f\left(x\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{4}{3}$

VD. Cho $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{f\left(x\right)}{1+2^x}\mathrm{d}x = 4$ trong đó $y=f\left(x\right)$ là hàm số chẵn trên $\left[-1;1\right]$. Khi đó $\int\limits_{-1}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2 B. 16 C. 4 D. 8

Vì $y=f\left(x\right)$ là hàm số chẵn nên ta chọn $f\left(x\right)=x^2$. Bấm máy như sau:

$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+2^x} dx \quad \frac{1}{3}$ | $\int_{-1}^{1} x^2 dx \quad \frac{2}{3}$

Ta thấy tích phân sau gấp đôi tích phân trước, suy ra $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 4.2 = 8$

VD. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{0}^{5}\left[1+2f(x)\right]\mathrm{d}x = 15$. Tính $I = \int\limits_{-5}^{5} f(x)\mathrm{d}x$

A. 10 B. 5 C. 30 D. $\frac{15}{2}$

Ta có: $\int\limits_{0}^{5}\left[1+2f(x)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{5} 1\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_{0}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 15 \Rightarrow \int\limits_{0}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = 5 \Rightarrow \int\limits_{-5}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = 5.2 = 10$

Bấm máy tính:

$\frac{15-\int_{0}^{5} 1\,dx}{2} \times 2 \quad 10$

VD. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1}$, với mọi $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $4 < f(5) < 5$ B. $2 < f(5) < 3$ C. $3 < f(5) < 4$ D. $1 < f(5) < 2$

Từ $f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3x+1}} = \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}(f(x))}{f(x)} = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + C \Leftrightarrow \ln f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + C \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C}$

Ta có $f(1) = 1 \Rightarrow C = \frac{-4}{3} \Rightarrow f(5) = e^{\frac{2}{3}.4-\frac{4}{3}} \approx 3,794$

Chọn C.

Cách khác:

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_{1}^{5} \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{5} \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$

$\int_1^5 \frac{d\left(f(x)\right)}{f(x)} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \ln\left(\left|f(x)\right|\right)\Big|_1^5 = \ln\left|\frac{f(5)}{f(1)}\right| = \frac{4}{3} \Rightarrow f(5) = e^{\frac{4}{3}}$

VD. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 x\left(f'(x)-2\right)dx = f(1)$. Tính $I = \int_0^1 f(x)dx$

A. $I = 0$ B. $I = -1$ C. $I = 1$ D. $I = 2$

Từ $\int_0^1 x\left(f'(x)-2\right)dx = f(1) \Leftrightarrow \int_0^1 x.f'(x)dx - \int_0^1 2xdx = f(1) \Leftrightarrow \int_0^1 x.f'(x)dx = f(1)+1$

Xét $\int_0^1 x.f'(x)dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx$

$= f(1) - \int_0^1 f(x)dx = f(1)+1 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = -1$. Chọn B

VD. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $I = \int_0^1 f(x)dx$

A. $I = -12$ B. $I = 8$ C. $I = 12$ D. $I = -8$

Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow (x+1)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = 10$

$= 2f(1) - f(0) - \int_0^1 f(x)dx = 10 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = -8$

2. Tích phân bình thường

Sau khi tìm nguyên hàm bằng các phương pháp. Ta áp dụng công thức của tích phân để tính giá trị tích phân.

Bấm máy trực tiếp [∫□].

3. Tích phân chống máy tính cầm tay

Đây là một dạng bài rất hay, tuy nhiên khả năng ra các bài toán về bản chất tích phân vẫn là dạng bài được ra nhiều hơn. Các cách thường áp dụng cho tích phân chống máy tính cầm tay: giải hệ phương trình bậc nhất, Table, mũ hóa,….

Về nguyên tắc cơ bản: cần lưu trước tích phân vào biến nhớ. Thường thì các ẩn là số nguyên hoặc hữu tỉ.

VD. Cho $\int_2^1 \frac{4\ln x+1}{x}dx = a\ln^2 2 + b\ln 2 \quad (a,b\in\mathbb{Z})$. Tính $4a+b$.

A. 3 B. 9 C. 7 D. 5

Gán $\int_2^1 \frac{4\ln x+1}{x}dx = A$

$\int_1^2 \frac{4\ln(X)+1}{X}dx \to A$

1.654053208

Giải hệ phương trình $\begin{cases} a\ln^2 2 + b\ln 3 = A \\ 4a+b=K \end{cases}$ với K là các đáp án.

Lần lượt thử với các đáp án, vì đề bài nói $a,b\in\mathbb{Z}$ nên máy tính báo số nguyên mới nhận. Với $K=9$ ta được

0.4804530139

X= 2

Y= 1

Vậy $a=2, b=1 \Rightarrow 4a+b=9$.

VD. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx = a\pi - \frac{1}{4}\ln b \quad (0<a<1, 1<b<3, a,b\in\mathbb{Q})$ Tính tích ab.

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{8}$

Gán tích phân vào A

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(X)}{\sin(X)+\cos(X)}$

0.5659858768

Từ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx = a\pi + \frac{1}{4}\ln b \Rightarrow a = \frac{A-\frac{1}{4}\ln b}{\pi}$ (rút a theo b)

Vào MODE 7 Coi hàm của ta là $y=\dfrac{A-\frac{1}{4}\ln x}{\pi}$, do $1<b<3$ nên ta chọn START 1 END 3 STEP 0,25

f(X)= (A − ln(X)/4)/π

Start? 1

End? 3

Step? 0.25

Ta thấy tại 2

	X	F(X)
4	1.75	0.1356
5	2	0.125
6	2.25	0.1156

0.125

Ta được $x=2, y=0{,}125=\dfrac{1}{8}$ hay $b=2, a=\dfrac{1}{8}\Rightarrow ab=\dfrac{1}{4}$.

VD. Biết $\int_3^4 \dfrac{dx}{x^2+x}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5\ \ (a,b,c\in\mathbb{Z})$. Tính $S=a+b+c$.

A. 6 B. -2 C. 2 D. 0

Gán $\int_3^4 \dfrac{dx}{x^2+x}=A$. Khi đó $A=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5=\ln 2^a+\ln 3^b+\ln 5^c$

Sử dụng tính chất $a=e^{\ln a}=\ln e^a$ ta có: $\ln e^A=\ln\left(2^a3^b5^c\right)\Leftrightarrow e^A=2^a3^b5^c$

Bấm:

e^A → $\dfrac{16}{15}$ tách $\dfrac{16}{15}=\dfrac{2^4}{3.5}=2^4.3^{-1}.5^{-5}$ (Sử dụng chức năng FACT)

Vậy $a=4, b=c=-1\Rightarrow S=a+b+c=2$

VD. Biết $\int_3^5 \dfrac{x^2+x+1}{x+1}dx=a+\ln\dfrac{b}{2}$ với a,b là các số nguyên. Tính $a-2b$

A. -2 B. 5 C. 2 D. 10

Gán tích phân vào A

$\int_3^5 \frac{X^2+X+1}{X+1}dx \to A$

8.405465108

Ta có: $A = a + \ln\frac{b}{2} \Leftrightarrow A - a = \ln\frac{b}{2} \Leftrightarrow e^{A-a} = \frac{b}{2} \Leftrightarrow 2e^{A-a} = b$

Sử dụng MODE 7 nhập hàm số START – 9, END 9, STEP 1

$f(X) = 2e^{A-X}$

	X	F(X)
17	7	8.1548
18	8	
19	9	1.1036

3

Vậy $a = 8, b = 3 \Rightarrow a - 2b = 2$. Chọn C.

VD. Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = a\sqrt{e} + b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a.b$

A. $P = 4$ B. $P = -8$ C. $P = -4$ D. $P = 8$

Lưu tích phân vào A

$\int_1^e \frac{\ln(X)}{\sqrt{X}}dx \to A$

0.7025574586

Ta có $A = a\sqrt{e} + b \Rightarrow A - a\sqrt{e} = b$ Sử dụng MODE 7 nhập hàm số START – 9, END 9, STEP 1

$f(X) = A - X\sqrt{e}$

	X	F(X)
7	-3	5.6487
8	-2	
9	-1	2.3512

4

Vậy $a = -2; b = 4 \Rightarrow P = a.b = -8$. Chọn B

VD. Cho tích phân: $I = \int_4^5 \frac{x^3+2}{x^4-5x^2+4}dx = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5 + d\ln 7 \quad (a,b,c,d \in \mathbb{Q})$. Tìm a, b, c, d.

(bài này sử dụng trên máy tính VINACAL vì máy tính casio không xử lý được)

Lưu tích phân vào A

$\int_4^5 \frac{x^3+2}{x^4-5x^2+4}dx \to A$

0.3015088199

Ta có $e^A = 2^a 3^b 5^c 7^d$

e^A

1.351897039

Ở đây ta không thể tách được về dạng tích các thừa số nguyên tố. (vì điều kiện cho hữu tỉ nên số mũ của ta không nguyên)

Ta sử dụng phương pháp MODE 7 nhập hàm số $F(X) = e^{AX} - X$ (vì $(a,b,c,d \in \mathbb{Q})$ nên ta nhân cho số nào đó sẽ làm cho các hệ số có thể phân tích được ra thừa số nguyên tố)

Tại $X = 6, F(X) = \frac{4287}{40960} \Rightarrow 6 + \frac{4287}{40960} = \frac{250047}{40960} = \frac{3^6.7^3}{2^{13}.5}$

$\Rightarrow a = \frac{-13}{6}, b = 1, c = \frac{-1}{6}, d = \frac{1}{2}$.

VD. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{(x+2)^{2017}}{x^{2019}}dx$

A. $\frac{3^{2018}-2^{2018}}{2018}$ B. $\frac{3^{2018}-2^{2018}}{4036}$ C. $\frac{3^{2017}}{4034} - \frac{2^{2018}}{2017}$ D. $\frac{3^{2021}-2^{2021}}{4040}$

Mẹo: Bấm máy số mũ to như vậy máy sẽ không xử lý được ta sẽ thu gọn biểu thức lại. bài toán của ta thu lại được $I = \int_1^2 \frac{(x+2)^{17}}{x^{19}}dx$

A. $\frac{3^{18}-2^{18}}{18}$ B. $\frac{3^{18}-2^{18}}{36}$ C. $\frac{3^{17}}{34} - \frac{2^{18}}{17}$ D. $\frac{3^{21}-2^{21}}{40}$

Bấm tích phân

$\int_1^2 \frac{(x+2)^{17}}{x^{19}}dx$

10754398.47

Bấm 4 đáp án

$\frac{3^{18}-2^{18}}{18}$ = 21508796.94

$\frac{3^{18}-2^{18}}{36}$ = 10754398.47

$\frac{3^{17}}{34}-\frac{2^{18}}{17}$ = 3782819.853

$\frac{3^{21}-2^{21}}{40}$ = 261456401.3

Chọn B.

VD. Cho $I=\int_0^4 x\sqrt{1+2x}dx$ và $u=\sqrt{2x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $I=\frac{1}{2}\int_1^3 x^2\left(x^2-1\right)dx$

B. $I=\frac{1}{2}\int_1^3 u^2\left(u^2-1\right)du$

C. $I=\frac{1}{2}\left(\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right)\Big|_1^3$

D. $I=\int_1^3 u^2\left(u^2-1\right)du$

Ta có $u=\sqrt{2x+1}\Leftrightarrow u^2=2x+1\Rightarrow x=\frac{u^2-1}{2}\Rightarrow udu=dx$

Đổi cận: $\begin{cases} x=0\to u=1 \\ x=4\to u=3 \end{cases}$

$$I=\int_0^4 x\sqrt{1+2x}dx=\int_1^3\frac{u^2-1}{2}udu=\frac{1}{2}\int_1^3\left(u^2-1\right)u^2du$$

Bấm máy: đầu tiên ta bấm $I=\int_0^4 x\sqrt{1+2x}dx$

$\int_0^4 X\sqrt{2X+1}\,dx$ = 19.86666667

Sau đó bấm 4 đáp án, thấy đán án nào có cùng kết quả là đúng

Loại câu A, vì chưa đổi biến.

Đáp án B $\frac{1}{2}\int_1^3 X^2(X^2-1)\,dx$ = 19.86666667 đúng.

VD. Biết $\int_3^5\frac{x^2+x+1}{x+1}dx=a+\ln\frac{b}{2}$ với a,b là các số nguyên. Tính $S=a-2b$

A. $S=-2$ B. $S=5$ C. $S=2$ D. $S=10$

Ta biến đổi $\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1}dx=\int_3^5\left(x+\frac{1}{x+1}\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2+\ln|x+1|\right)\Big|_3^5=8+\ln\frac{3}{2}$

Bấm máy: Gán $\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1}dx\to A\Rightarrow A=a+\ln\frac{b}{2}\Rightarrow a=A-\ln\frac{b}{2}$

$\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1}dx\to A$

8.405465108

MODE 7

$f(X)=A-\ln\left(\frac{X}{2}\right)$

Start?	End?	Step?
1	9	1

	X	F(X)
2	2	8.4054
3	3	
4	4	7.7123

8 ta được $b=3, a=8$

Vậy $a-2b=8-2.3=2$

VD. Kết quả tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-1-\sin x)dx=\pi\left(\frac{\pi}{a}-\frac{1}{b}\right)-1\ (a,b\in\mathbb{Z})$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $a+2b=8$ B. $a+b=5$ C. $2a-3b=2$ D. $a-b=2$

Gán: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2X-1-\sin(X)$ -0.1033952265 $A=\pi\left(\frac{\pi}{a}-\frac{1}{b}\right)-1\Rightarrow\frac{\pi}{\frac{A+1}{\pi}+\frac{1}{b}}=a$

Table: $f(X)=\frac{\pi}{\frac{A+1}{\pi}+\frac{1}{X}}$

Start? -5 | End? 9 | Step? 1

X	F(X)
1	2.444
2	4
3	5.0774

ta được $b=2, a=4$. Suy ra khẳng định **B** sai.

VD. Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = a\sqrt{e}+b$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính ab

A. $ab=4$ B. $ab=-8$ C. $ab=-4$ D. $ab=8$

Gán $\int_1^e \frac{\ln(X)}{\sqrt{X}}dx \to A$ 0.7025574586 $A=a\sqrt{e}+b \Rightarrow b=A-a\sqrt{e}$

MODE 7:

f(X)=A−X√e

Start? -5 | End? 5 | Step? 1

X	F(X)
-3	5.6487
-2	4
-1	2.3512

$a=-2, b=4$

Vậy $ab=-8$.

VD. Biết $\int_1^e \frac{1}{x^3+x} = a\ln\left(e^2+1\right)+b\ln 2+c$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=1$ B. $S=-1$ C. $S=0$ D. $S=2$

Gán

$\int_1^e \frac{1}{X^3+X}dx \to A$ 0.2831095848

$$\int_1^e \frac{1}{x^3+x}dx = \int_1^e \left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2+1}\right)dx = \int_1^e \frac{1}{x}dx - \int_1^e \frac{x}{x^2+1}dx = \int_1^e \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int_1^e \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}$$

$$= \left(\ln x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right)\Bigg|_1^e = -\frac{1}{2}\ln\left(e^2+1\right)+\frac{1}{2}\ln 2+1$$

$\Rightarrow a+b+c=1$

VD. Giả sử $\int e^{2x}\left(2x^3+5x^2-2x+4\right)\mathrm{d}x = \left(ax^3+bx^2+cx+d\right)e^{2x}+C$. Khi đó $a+b+c+d$ bằng

A. -2 B. 2 C. 3 D. 5

Bấm như sau:

$\frac{1}{e^{200}}\int_0^{100} e^{2X}(2X^3+5X^2-2X+4)dx$

$\frac{1}{e^{200}}\int_0^{100} e^{2X}(2X$ 1009803 tách $1009803 = x^3+x^2-2x+3$

Vậy $a+b+c+d=3$. Chọn C.

VD. Cho $I = \int_1^e \frac{2\ln x+1}{x(\ln x+1)^2}\mathrm{d}x = a\ln 2 - \frac{b}{c}$ với $a,b,c \in Z$, $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $S=a+b+c$

A. $S=3$ B. $S=5$ C. $S=0$ D. $S=7$

Gán tích phân vào A

$\int_1^e \frac{2\ln(X)+1}{X(\ln(X)+1)^2}dx$ 0.8862943611

$\Rightarrow A = a\ln 2 - \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{b}{c} = a\ln 2 - A$. Ta MODE 7

Ta thấy [X: 1, 2, 3; F(X): -0.193, 0.5, 1.1931] 0.5 tại $a=2 \Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{1}{2} \Rightarrow a=2, b=1, c=2 \Rightarrow a+b+c=5.$ Chọn B.

VD. Cho $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4+3x^2+2}\mathrm{d}x = \ln a + b\ln c$, $(a,b,c \in \mathbb{Q})$. Tính $S=a+2b+c$

A. 3 B. 2 C. 0 D. -3

Gán tích phân vào A

$\int_0^1 \frac{x^3}{x^4+3x^2+2}dx \to A$

0.05889151783

Ta có $A=\ln a+b\ln c \Leftrightarrow e^A=a.c^b$

Vì $a,b,c\in\mathbb{Q}$ nên ta chọn hàm như sau $e^{Ax}=a^x c^{bx}$. Ta nhân thêm x vào mũ vì khi đó ta sẽ nhận được kết quả đẹp hơn.

Vào MODE 7

$f(X)=e^{AX}$

Start? -5

End? 5

Step? 1

Ta được

	X	F(X)
7	1	1.0606
8	2	1.125
9	3	1.1932

1.125 ; 9⌟8

Khi đó $a^2c^{2b}=\frac{9}{8}=3^2.2^{-3}\Rightarrow a=3,b=\frac{-3}{2},c=2\Rightarrow S=a+2b+c=2$

VD. Cho $I=\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}+4}=a\sqrt{2x-1}+b\ln\left(\sqrt{2x-1}+4\right)+C$. Tính $a+b$

A. -2 B. -3 C. 1 D. 2

Ta gán cận cho nguyên hàm:

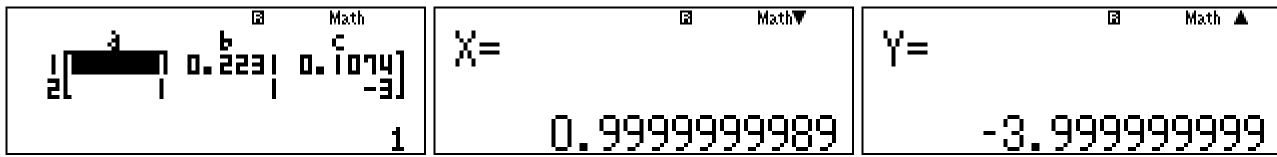
$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{2x-1}+4}=a+b\ln5-b\ln4=a+b\left(\ln5-\ln4\right)=A$$

Với $A=$ $\int_{0.5}^1 \frac{1}{\sqrt{2X-1}+4}dx \to A$

0.1074257939

Đến đây, ta có thể chọn phương trình $a+b=$ *ĐÁ* rồi giải hệ hoặc chọn tiếp một cặp cận nữa thay vào.

Ở đây xin phép dựa vào đáp án và chọn đáp án nào cho ra hệ số a,b đẹp.



Vậy $a=1,b=-4$. Vậy $a+b=-3$.

Bài 3. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

I. Lý thuyết

1. Tính diện tích hình phẳng

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục không âm trên đoạn $\left[a;b\right]$. Khi đó diện tịch của hình thang cong giới hạn bởi $y=f\left(x\right),y=0,x=a,x=b$ là $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$

Diện tích S của hình phẳng $\left(D\right)$ giới hạn bởi $y=f\left(x\right),y=0,x=a,x=b$ là $S=\int\limits_a^b \left|f\left(x\right)\right|dx$

Diện tích S của hình phẳng $\left(D\right)$ giới hạn bởi $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right),x=a,x=b$ là $S=\int\limits_a^b \left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx$

Tính $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ có các nghiệm $x_1,x_2,x_3,....\in\left(a;b\right)$. Khi bài toán không cho cận thì cận chính là hai nghiệm x_1 và x_n.

2. Tính thể tích vật tròn xoay

Thể tích tròn xoay tạo bởi mặt phẳng tròn xoay giới hạn bởi đường $y=f\left(x\right),y=0,x=a,x=b$ quay quanh trục Ox là $V=\pi\int\limits_a^b f^2\left(x\right)dx$

Thể tích tròn xoay tạo bởi mặt phẳng tròn xoay giới hạn bởi đường $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right),x=a,x=b$ quay quanh trục Ox là $V=\pi\int\limits_a^b \left|f^2\left(x\right)-g^2\left(x\right)\right|dx$

3. Tính quãng đường

Cho phương trình vận tốc $V = f(t)$ quãng đường là nguyên hàm của vận tốc $S = \int_a^b f(t)dt$

4. Một số ứng dụng khác

Tính diện tích chỏm cầu có bán kính R và đường cao h : $S = 2\pi \int_{R-h}^{R} \sqrt{R^2 - h^2}$

Thể tích hình cầu do hình tròn $(C): x^2 + y^2 = R^2$ khi quay quanh trục Ox:

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2)dx = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Thể tích hình elip $(E): \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ khi quay quanh trục Oy

$$V = \pi \int_{-b}^{b} \left(a^2 - \frac{a^2y^2}{b^2}\right)dy = 2\pi \int_0^b \left(a^2 - \frac{a^2y^2}{b^2}\right)dy = \frac{4\pi a^2 b}{3}$$

I. Ví dụ

VD. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của $y = x^2 + 2$ và $y = 3x$

A. 2
B. 3
C. $\frac{1}{2}$
D. $\frac{1}{6}$

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$. Diện tích cần tính bằng $\int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx = \frac{1}{6}$.

VD. Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi $y = x^3 - x$ và $y = -x^2 + x$

A. $S = \frac{37}{12}$
B. $S = \frac{9}{4}$
C. $S = \frac{81}{12}$
D. $S = 13$

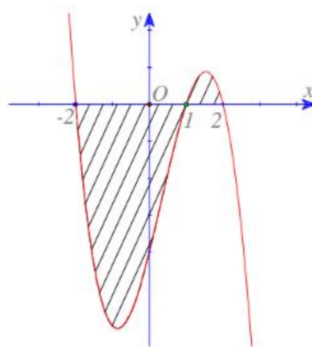
$x^3 - x = x - x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$. Bấm $\int_{-2}^{1} |x^3 + x^2 - 2x| dx \approx \frac{37}{12}$

VD. Cho đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ sau đây. Diện tích S của hình phẳng (phần gạch chéo) được xác định bởi

A. $S = \int_{-2}^{2} f(x)dx$
B. $S = \int_{-2}^{1} f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$

C. $S=\int_{1}^{-2} f(x)\,dx+\int_{1}^{2} f(x)\,dx$

D. $S=\int_{-2}^{1} f(x)\,dx-\int_{1}^{2} f(x)\,dx$



Diện tích có giá trị dương nên $S=-\int_{-2}^{1} f(x)\,dx+\int_{2}^{1} f(x)\,dx=\int_{1}^{-2} f(x)\,dx+\int_{2}^{1} f(x)\,dx$ Chọn C.

VD. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^3-1, y=0, x=0, x=2$ bằng

A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{7}{2}$ C. 3 D. $\frac{9}{2}$

Bấm $\int_{0}^{2}\left|x^3-1\right|dx=\frac{7}{2}$

VD. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^2-3x+2$ và $y=x-1$.

A. $S=\frac{4}{3}$ B. $S=\frac{37}{14}$ C. $S=\frac{799}{300}$ D. $S=2$

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2-3x+2=x-1 \Leftrightarrow x=1, x=3$

Ta có $S=\int_{1}^{3}\left|x^2-4x+3\right|\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$. Chọn A.

VD. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\left|x^2-1\right|$ và $y=|x|+5$ là

A. $\frac{73}{6}$ B. 12 C. $\frac{73}{3}$ D. 14

PTHĐGĐ: $\left|x^2-1\right|=|x|+5 \Leftrightarrow x=\pm 3$

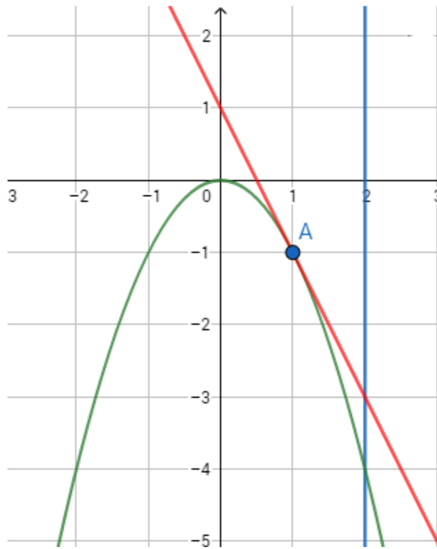
Bấm $\int_{-3}^{3}\left|\left|x^2-1\right|-|x|-5\right|=\frac{73}{3}$

$\int_{-3}^{3}\left|\left|X^2-1\right|-\left|X\right|-\right.$▷ Math ▲ 24.33333184	$\frac{73}{3}$ Math ▲ 24.33333333

Hoàng Văn Bình

VD. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P), tiếp tuyến của nó tại $A(1;-1)$ và đường thẳng $x=2$. Tính diện tích S

A. $S=1$ B. $S=\frac{4}{3}$ C. $S=\frac{2}{3}$ D. $S=\frac{1}{3}$



Phương trình parabol $y=x^2$ (vì đi qua $(0.0),(1;-1),(-1;-1)$)

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại A là $y=-2x+1$

Vậy diện tích giới hạn $S=\int_1^2\left|(-2x+1)-(-x^2)\right|dx=\int_1^2\left|-2x+1+x^2\right|dx=\frac{1}{3}$

VD. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x\ln x, y=0, x=e$ quay xung quanh trục Ox tạo thành khối tròn xoay có thể tích $\frac{\pi}{a}\left(be^3-2\right)$. Tìm a,b

A. $a=27,b=5$ B. $a=26,b=6$ C. $a=24,b=5$ D. $a=27;b=6$

ĐK: $x>0$

Phương trình hoành độ giao điểm $x\ln x=0 \Leftrightarrow x=1$

$V=\pi\int_1^e x^2\ln^2 x dx=\left(5e^3-2\right)\frac{\pi}{27}$ suy ra $a=27,b=5$

VD. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{2-x}$, $y=x, y=0$ quanh trục Ox được tính theo công thức nào sau đây?

A. $V=\pi\int_0^1(2-x)dx+\pi\int_1^2 x^2dx$ B. $V=\pi\int_0^2(2-x)dx$

C. $V=\pi\int_0^1 xdx+\pi\int_1^2\sqrt{2-x}dx$

D. $V=\pi\int_0^1 x^2dx+\pi\int_1^2(2-x)dx$

Phương trình hoành độ giao điểm của $\begin{cases} x=\sqrt{2-x}\Leftrightarrow x=1 \\ x=0 \\ \sqrt{2-x}=0\Leftrightarrow x=2 \end{cases}$;

Vậy ta có: $V=\pi\int_0^1 x^2dx+\pi\int_1^2(2-x)dx$

VD. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$ đường thẳng $x=1$ và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục Ox.

A. $V=\dfrac{\pi}{3}$

B. $V=\dfrac{1}{3}$

C. $V=\dfrac{\pi}{5}$

D. $V=\dfrac{1}{5}$

Ta bấm: $\pi\int_0^1 |x^2|dx$ $\quad \frac{1}{3}\pi$

VD. Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{\dfrac{x}{4-x^2}}$, trục Ox và đường thẳng $x=1$.

Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình H quanh Ox

A. $\dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{4}{3}$

B. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4}{3}$

C. $\dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{3}{4}$

D. $\pi\ln\dfrac{4}{3}$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{\dfrac{x}{4-x^2}}=0\Leftrightarrow x=0$

Thể tích giới hạn: $V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{\dfrac{x}{4-x^2}}\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{4}{3}$. Chọn A.

VD. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi hai trục đồ thị, đường thẳng $x=1$ và đồ thị hàm số $y=1+x^3$. Tính thể tích khối tròn xoay do (H) sinh ra khi quay quanh trục Ox

A. $\dfrac{5}{3}\pi$

B. $\dfrac{23}{14}\pi$

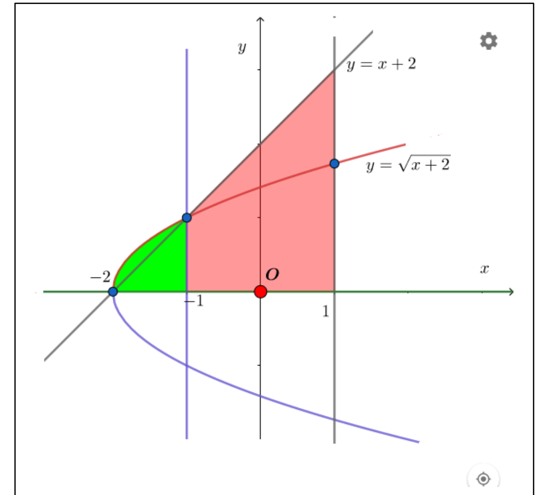
C. $\dfrac{9}{14}\pi$

D. 2π

Bấm máy tính: $\pi\int_0^1 |1+X^3|^2 dx$ = $\frac{23}{14}\pi$. Chọn B

VD. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-\sqrt{x+2}, y=x+2, x=1$. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng H quanh trục hoành.

A. $V=\frac{27\pi}{2}$ B. $V=\frac{9\pi}{2}$ C. $V=9\pi$ D. $V=\frac{55\pi}{6}$



Vì đồ thị $y=-\sqrt{x+2}$ nằm dưới Ox nên bị âm. Ta lấy đối xứng lên Ox.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x+2-\sqrt{x+2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Ta có: $V=\pi\int_{-2}^{-1}\left(\sqrt{x+1}\right)^2 dx+\pi\int_{-1}^{1}(x+2)^2 dx=\frac{55\pi}{6}$. Chọn D.

VD. Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t)=\frac{\quad}{1+0,5t}$ và lúc đầu đám vi trùng có 250000 con. Hỏi sau 10 ngày số lượng vi trùng là bao nhiêu?

A. 258.959 con B. 253.584 con C. 257.167 con D. 264.334 con

Ta có số lượng vi trùng bằng số lượng ban đầu cộng với số lượng đã tăng trong 10 ngày được tính như sau: $250000+\int_0^{10}\frac{4000}{1+0,5t}dt$

$250000+\int_0^{10}\frac{4000}{1+0.5}$ = 264334.0758

Chọn D.

VD. Trong một đợt xả lũ, nhà máy thủy điện đã xã lũ trong 40 phút với lưu lượng nước tại thời điểm t giây là $v(t)=10t+500$ (m^3/s). Hỏi sau khi xã lũ trên thì hồ thoát được một lượng nước là bao nhiêu?

A. $5.10^4\left(m^3\right)$ B. $4.10^6\left(m^3\right)$ C. $3.10^7\left(m^3\right)$ D. $6.10^6\left(m^3\right)$

Ta có lượng nước thoát ra là: $\int\limits_0^{2400}(10t+500)=3.10^7\left(m^3\right)$

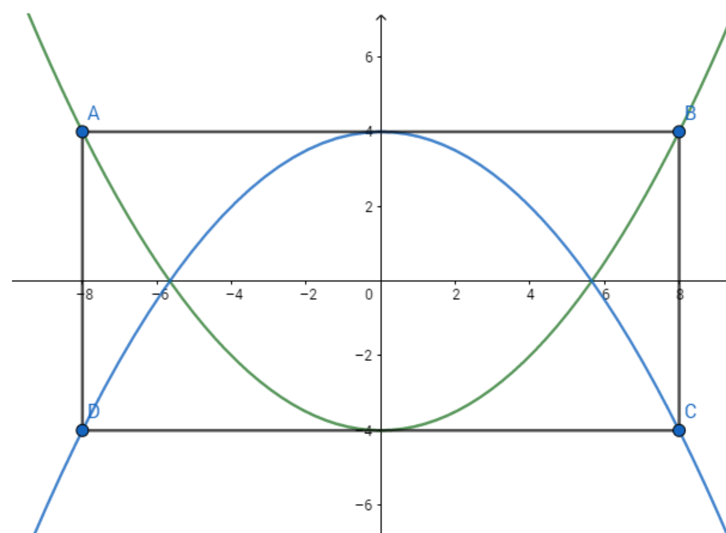
VD. Một ô tô đang chuyển động với vận tốc 15 m/s thì người lái đạp phanh. Kể từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t)=-5t+15\ (m/s)$. Trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây. Hỏi từ lúc bắt đầu đạp phanh cho đến khi xe dừng hẳn thì còn di chuyển được bao nhiêu m?

A. 22,5 m B. 45 m C. 2,25 m D. 4,5 m

Quãng đường là nguyên hàm của vận tốc. Ta có, tại thời điểm xe dừng hẳn thì vận tốc bằng 0, suy ra $t=3$. Vậy quãng đường đi được là $\int\limits_0^3(-5t+15)dt=22,5$ m

VD. Một mảnh vườn toán học có dạng hình chữ nhật, chiều dài là 16 m chiều rộng là 8 m. Các nhà toán học dung hai đường parabol, mỗi parabol có đỉnh là trung điểm của một cạnh dài và đi qua hai đầu mút của cạnh dài đối diện. Phần mảnh vườn nằm ở miền trong được giới hạn bởi hai parabol được trồng hoa hồng. Biết chi phí trồng hoa hồng là $45.000\ VND/m^2$. Hỏi các nhà toán học phải chi bao nhiêu tiền để trồng hoa trên mảnh vườn đó?

A. 3322000 *VND* B. 3476000 *VND* C. 2715000 *VND* D. 2159000 *VND*



Ta gán hệ trục tọa độ cho mảnh vườn như hình vẽ.

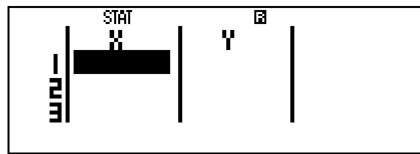
Ta cần phải xác định được phương trình hai đường parabol sau đó tính diện tích rồi mới tìm được số tiền.

Cách viết phương trình parabol bằng máy tính cầm tay:

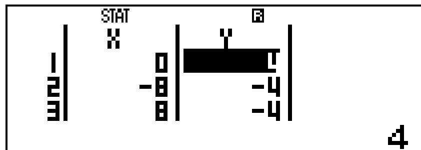
Ta sử dụng chương trình thống kê MODE 3 trong máy tính:

Để bắt đầu sử dụng ta ấn MODE 3 =

Ta viết phương trình của parabol úp trước. Nhìn đồ thị ta thấy, parabol úp đi qua ba điểm $(0;4),(8;4),(-8;-4)$

Bấm máy tính MODE 3 3 

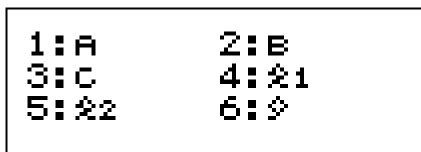
. Ta thấy có hai cột x nhập hoành độ ba điểm parabol đi qua và y nhập tung độ tương ứng của ba điểm ở cột x. Ta nhập như sau:



. Nhập xong rồi ấn nút AC.

Lưu ý: Phương trình parabol của ta thường là $y = Ax^2 + Bx + C$, nhưng trong máy tính thì ngược lại $y = Cx^2 + Bx + A$. Chúng ta sẽ hiểu theo máy tính.

Ấn SHIFT 1 5



để tìm các hệ số C, B, A

Chọn $3 \Rightarrow C =$
STAT
C
-1⌟8

Chọn $2 \Rightarrow B =$
STAT
B
0

Chọn $1 \Rightarrow A =$
STAT
A
4

Vậy phương trình parabol úp là $y_1 = \frac{-1}{8}x^2 + 4$

Phương trình parabol ngữa có thể viết tương tự, tuy nhiên do hai đồ thị đối xứng nhau qua $Ox \Rightarrow y_2 = \frac{1}{8}x^2 - 4$

Đến đây ta áp dụng bài toán tích phân tích diện tích giới hạn bởi hai đồ thị.

Tìm giao điểm của hai parabol:

$$y_1 = y_2 \Leftrightarrow y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow \frac{-1}{8}x^2 + 4 - \frac{1}{8}x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{8}x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 4\sqrt{2}$$

Ta tính diện tích nửa trên sau đó nhân 2 ta được diện tích phần giới hạn của hai parabol

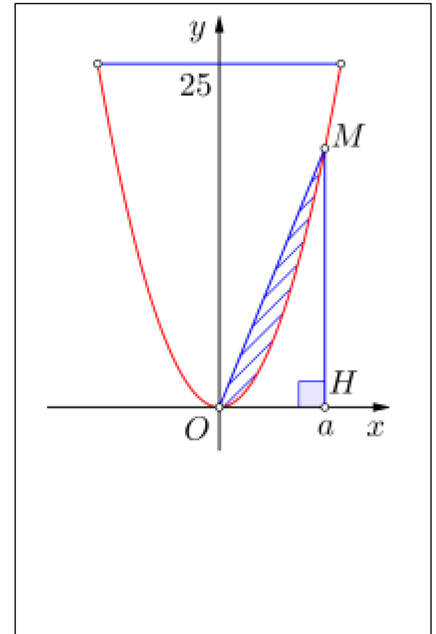
$\int_{-4\sqrt{2}}^{4\sqrt{2}} \left\|-\frac{1}{8}x^2+4\right\| dx$ 30.16988933	Ans×2 60.33977866

Sau đó ta nhân với số tiền trồng hoa

Ans×45000   2715290.04

Vậy số tiền các nhà toán học phải trả là $2715000\ VND$. Chọn C.

VD. Ông B có một khu vườn giới hạn bởi một đường parabol và một đường thẳng. Nếu đặt hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ thì parabol có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng $y = 25$. Ông B dự định dung một mảnh vườn nhỏ được chia từ khi vườn bởi một đường thẳng đi qua O và điểm M trên parabol để trồng hoa. Hãy giúp ông B xác định điểm M bằng cách tính độ dài OM để diện tích mảnh vườn nhỏ là $\frac{9}{2}$.

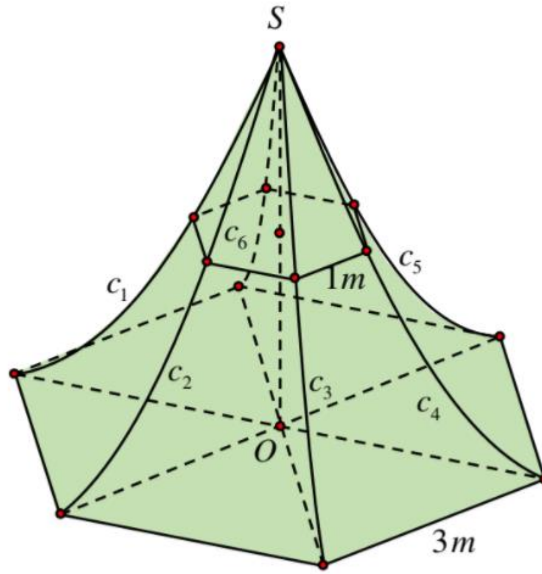


A. $OM = 2\sqrt{5}$ B. $OM = 15$ C. $OM = 10$

Gọi H là điểm có hoành độ a là hình chiếu của điểm M lên Ox. Suy ra phương trình $OM: y = \tan\frac{OM}{OH}.x = ax$. Ta có $\int_0^a \left(ax - x^2\right)dx = \left.\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^a = \frac{a^3}{6}$

Ta có $\frac{a^3}{6} = \frac{9}{3} \Leftrightarrow a = 3 \Rightarrow OM = 3\sqrt{10}$

VD. Người ta dựng một cái lều vải (H) có dạng chóp lục giác cong đều như hình vẽ. Đáy là một hình lục giác có cạnh bằng 3m. Chiều cao $SO = 6m$ SO vuông góc đáy. Các sợi dây $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ nằm trên các đường hình parabol có trục đối xứng song song với SO. Giả sử giao tuyến của (H) với một mặt phẳng (P) vuông góc với đáy tại trung điểm SO thì được lục giác có cạnh bằng 1 m. Tính thể tích phần trong của lều (H).



A. $\frac{135\sqrt{3}}{5}\left(m^2\right)$

B. $\frac{96\sqrt{3}}{5}\left(m^2\right)$

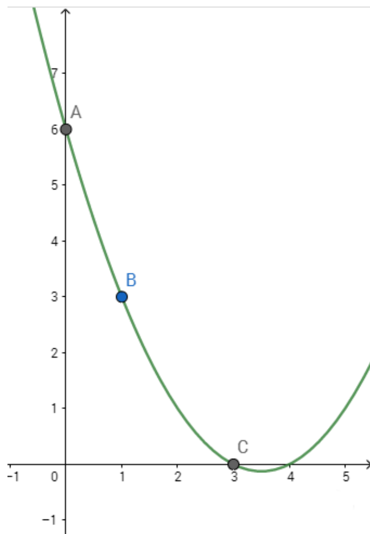
C. $\frac{135\sqrt{3}}{4}\left(m^2\right)$

D. $\frac{135\sqrt{3}}{8}\left(m^2\right)$

Ta xét một mặt phẳng đi qua SO và c_1. Ta thấy c_1 đi qua ba điểm $A(0;6), B(1;3), C(3;0)$

$\Rightarrow c_1 : y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 6$. Rút $x \to y : x = \frac{7}{2} - \sqrt{2y + \frac{1}{4}}$. Thể tích của lều:

$$V = \int_0^6 \frac{6\sqrt{3}}{4}\left(\frac{7}{2} - \sqrt{2y + \frac{1}{4}}\right)^2 dy = \frac{135\sqrt{3}}{8}$$



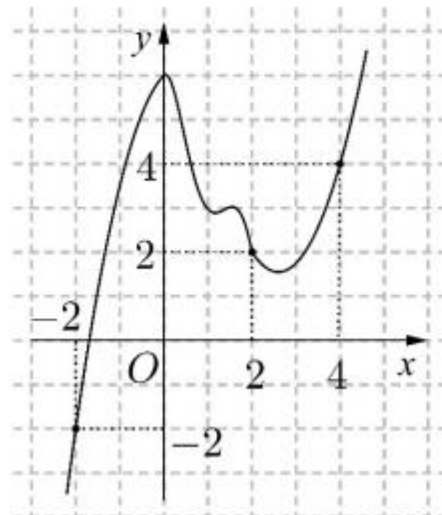
VD. Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15\ m/s$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t \quad m/s^2$. Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

A. $70,25\ m$ B. $68,25\ m$ C. $67,25\ m$ D. $69,75\ m$

$v(t) = \int a(t)dt = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + C$ mà $v_0 = 15 = C \Rightarrow \frac{t^3}{3} + 2t^2 + 15$

Bấm $\int_0^3 \frac{X^3}{3} + 2X^2 + 15dx$ 69.75.

VD. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Đặt $h(x) = 2f(x) - x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $h(4) = h(-2) > h(2)$

B. $h(4) = h(-2) < h(2)$

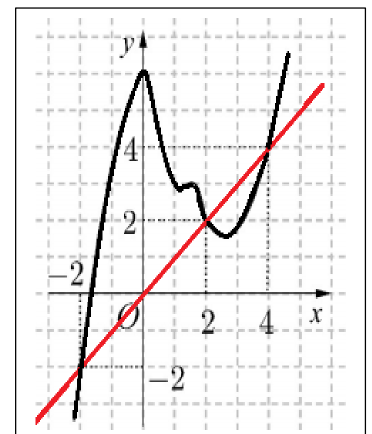
C. $h(2) > h(4) > h(-2)$

D. $h(2) > h(-2) > h(4)$

Ta có $h'(x) = 2[f'(x) - x] \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x$

Đường thẳng $y = x$ đi qua ba điểm $(-2;-2);(2;2);(4;4)$ trên đồ thị

Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích phần bên trên và bên dưới của đường thẳng $y = x$



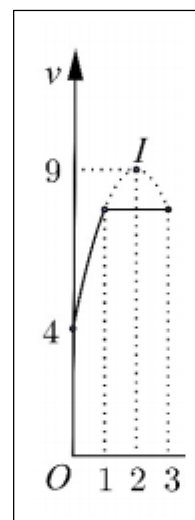
$S_1 > 0 \Leftrightarrow \int_{-2}^{2} h'(x)dx > 0 \Leftrightarrow h(2) - h(-2) > 0 \Leftrightarrow h(2) > h(-2)$

$S_2 < 0 \Leftrightarrow -\int_{2}^{4} h'(x)dx < 0 \Leftrightarrow h(2) - h(4) > 0 \Leftrightarrow h(2) > h(4)$

Mà $S_1 > S_2 \Rightarrow h(2) - h(-2) > h(2) - h(4) \Leftrightarrow h(4) > h(-2)$

Suy ra $h(2) > h(4) > h(-2)$

VD. Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị có một phần là đường parabol có đỉnh là $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại của đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A. $s = 23,25(km)$

B. $s = 21,58(km)$

C. $s = 15,50(km)$

D. $s = 13,83(km)$

Phương trình parabol của chuyển động là $y=\frac{-5}{4}x^2+5x+4$

Ta có $v(1)=\frac{31}{4}\Rightarrow$ phương trình đường thẳng của chuyển động là $y=\frac{31}{4}$

Ta có quãng đường vật chuyển động được tính theo $\int_0^1\left(\frac{-5}{4}x^2+5x+4\right)dx+\int_1^3\frac{31}{4}dx=21,58(3)$

Đọc thêm: công thức *Walliss*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!} & (1)\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}.\frac{\pi}{2} & (2)\end{cases}$$ lẻ dùng (1), chẵn dùng (2).

$n!!$ đọc là n *Walliss* và được hiểu dựa vào n chẵn hay lẻ.

VD. $0!!=1;\ 1!!=1;\ 2!!=2;\ 3!!=1.3;\ 4!!=2.4;\ 5!!=1.3.5$

VD. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{11}xdx=\frac{10!!}{11!!}=\frac{2.4.7.8.10}{1.3.5.7.9.11}=\frac{256}{693}$

VD. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}xdx=\frac{9!!}{10!!}.\frac{\pi}{2}=\frac{63\pi}{512}$